高２　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1,1,1 （満点：9）

解答【1】

1

(1)	(a)	2 個
	(b)	$(-1,-1)$，$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{7}{5}\right)$
(2)	(a)	1 個
	(b)	$(1,-1)$
(3)	(a)	0 個
	(b)	$\times$

［解　説］

1　(1)　$x^2+y^2=2$ に $y=2x+1$ を代入すると，$x^2+(2x+1)^2=2$

整理して，$5x^2+4x-1=0$

この 2 次方程式の判別式 D は，$\dfrac{D}{4}=2^2-5\cdot(-1)=9>0$

よって，与えられた円と直線は異なる 2 つの共有点をもつ。

共有点の x 座標は，方程式 $5x^2+4x-1=0$ の実数解である。

$(x+1)(5x-1)=0$ より，$x=-1$，$\dfrac{1}{5}$ となる。

直線の方程式 $y=2x+1$ にそれぞれ代入して，

求める共有点の座標は，$(-1,-1)$，$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

(2)　$x^2+y^2=2$ に $y=x-2$ を代入すると，$x^2+(x-2)^2=2$

整理して，$x^2-2x+1=0$

この 2 次方程式の判別式 D は，$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$

よって，与えられた円と直線は 1 つの共有点をもつ（接する）。

共有点の x 座標は，方程式 $x^2-2x+1=0$ の実数解である。
$(x-1)^2=0$ より，$x=1$ となる。
直線の方程式 $y=x-2$ に代入して，
求める共有点の座標は，$(1,-1)$

(3)　$x^2+y^2=2$ に $y=x-3$ を代入すると，$x^2+(x-3)^2=2$

整理して，$2x^2-6x+7=0$

この 2 次方程式の判別式 D は，$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-2\cdot7=-5<0$

よって，与えられた円と直線は共有点をもたない。

高２　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1,1,1（満点：9）

解答【1】

2

(1)	$-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$
(2)	$r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

2 〔考え方〕

共有点の座標を求める必要がない問題なので，点と直線の距離を利用する。

(1) 円の中心が原点であることから，原点と直線 $x+y-m=0$ との距離を d とすると，

$$d = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 0 - m|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$$

円の半径は 1 であり，直線が円と異なる 2 つの共有点をもつとき，$d<1$ であるから，

$$\frac{|m|}{\sqrt{2}} < 1$$

よって，$-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

(2) 円の中心が原点であることから，原点と直線 $x-y+5=0$ との距離を d とすると，

$$d = \frac{|1\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

円と直線が接するとき，$r=d$ となるから，$r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

〔別解〕（判別式を利用した解法）

(1) $y=-x+m$ を円の方程式に代入すると，$x^2+(-x+m)^2-1=0$ であり，整理すると，

$$2x^2-2mx+(m^2-1)=0$$

この 2 次方程式の判別式 D は，

$$\frac{D}{4} = m^2 - 2\cdot(m^2-1) = 2-m^2$$

円と直線が異なる 2 つの共有点をもつ条件は $D>0$ であるから，

$$2-m^2>0$$
$$(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2})<0$$

よって，求める m の値の範囲は，$-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$

(2) $x^2+y^2=r^2$ に $y=x+5$ を代入すると，$x^2+(x+5)^2=r^2$ であり，整理すると，

$$2x^2+10x+(25-r^2)=0$$

この 2 次方程式の判別式 D は，

$$\frac{D}{4} = 5^2 - 2\cdot(25-r^2) = 2r^2-25$$

接するための条件は，$D=0$ であるから，$2r^2-25=0$

$r>0$ より，$r = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

高２　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1,1,1 （満点：9）

解答【1】

3

$3\sqrt{2}$

3　円と直線の異なる 2 つの共有点を A，B，また，線分 AB の中点を M とおく。このとき，OM ⊥ AB である。中心 O と直線 $x - y - 1 = 0$ との距離は，

$$\mathrm{OM} = \frac{|1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

また，OA は半径なので，$\mathrm{OA} = \sqrt{5}$

以上より，△OAM において，三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OM}^2 = \sqrt{5}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$$

よって，$\mathrm{AM} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AM}$ であるから，$\mathrm{AB} = 3\sqrt{2}$

高２　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1 （満点：7）

解答【2】

1

(1)	$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$
(2)	$-\dfrac{7}{8}$
(3)	$\dfrac{\sqrt{15}}{8}$
(4)	$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

2

$\sqrt{2}-1$

3

$2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

4

最大値	$\sqrt{2}$
最小値	$-\sqrt{2}$

※完答

［解　説］

1 (1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\alpha>0$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

(2) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-1=-\dfrac{7}{8}$

(3) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(4) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$

よって，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

2 $\tan\dfrac{\pi}{8}>0$ より，

$$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}=\sqrt{2}-1$$

3 $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるので，

$$（与式）=2\left\{\sin\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

よって，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ となるような α は，$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

したがって，（与式）$=2\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

4 $\sin\theta-\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$ とおくと，

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$\alpha=-\dfrac{\pi}{4}$

よって，$y=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$-1\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから，$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

したがって，y の最大値は $\sqrt{2}$，最小値は $-\sqrt{2}$ である。

高２　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1 （満点：12）

解答【3】

1

(1)	$\log_{27} 3 = \dfrac{1}{3}$
(2)	$10^{-2} = \dfrac{1}{100}$

［解　説］

2

(1)	1
(2)	0
(3)	-3
(4)	-1

2 (1) $8 = 8^1$ であるから，$\log_8 8 = 1$

(2) $1 = 13^0$ であるから，$\log_{13} 1 = 0$

(3) $0.5 = \dfrac{1}{2}$，$8 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ であるから，$\log_{0.5} 8 = -3$

(4) $0.1 = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$ であるから，$\log_{10} 0.1 = -1$

3

(1)	解説参照
(2)	解説参照

3 (1) 〔証明〕

$x = a^p$ とおく。定義より，$p = \log_a x$

このとき，

$$(\text{左辺}) = \log_a (a^p)^k = \log_a a^{kp} = kp = k \log_a x = (\text{右辺}) \quad (\text{終})$$

(2) 〔証明〕

底を a にそろえると，

$$(\text{左辺}) = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1 = (\text{右辺}) \qquad (\text{終})$$

4

(1)	2
(2)	$\dfrac{5}{2}$
(3)	4
(4)	$\dfrac{15}{2}$

4 (1) $\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8 (2 \cdot 32) = \log_8 64 = 2$

(2)
$$\log_2 96^{\frac{1}{2}} - \log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2}\log_2 96 - \frac{1}{2}\log_2 3$$
$$= \frac{1}{2}\log_2 \frac{96}{3} = \frac{1}{2}\log_2 32 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

(3)
$$\frac{3}{2}\log_3 27 + 2\log_3 \sqrt{5} - \log_3 \sqrt{75} = \log_3 27^{\frac{3}{2}} + \log_3 5 - \log_3 5\sqrt{3}$$
$$= \log_3 \frac{81\sqrt{3} \cdot 5}{5\sqrt{3}} = \log_3 81 = 4$$

(4) $(\log_9 5 + \log_3 25) \log_5 27$

$$= \left(\frac{\log_3 5}{\log_3 9} + \log_3 25\right)\left(\frac{\log_3 27}{\log_3 5}\right)$$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 9} \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 5} + \log_3 25 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 5}$$

$$= \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$