高３　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1 （満点：6）

解答【1】

1

(1)	$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \ \dfrac{11}{6}\pi$
(2)	$\theta=\dfrac{\pi}{12},\ \ \dfrac{17}{12}\pi$
(3)	$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \ \dfrac{4}{3}\pi$

［解　説］

1　(1)　単位円と直線 $y=-\dfrac{1}{2}$ の交点の θ を求めればよい。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求める θ は，$\theta=\dfrac{7}{6}\pi,\ \ \dfrac{11}{6}\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi\quad\cdots$①

単位円の①の範囲の周上で，x 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる $\theta+\dfrac{\pi}{4}$ は，

$$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3},\quad \frac{5}{3}\pi$$

ゆえに，$\theta=\dfrac{\pi}{12},\ \ \dfrac{17}{12}\pi$

(3)　$3+\tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta=0$ を整理して，$(\tan\theta-\sqrt{3})^2=0$

よって，$\tan\theta=\sqrt{3}$

ゆえに，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \ \dfrac{4}{3}\pi$

2

$\theta=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi,\ \ \dfrac{5}{6}\pi+2n\pi,$ $\dfrac{\pi}{2}+n\pi$（n は整数）

2　左辺を変形すると，$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

これを整理して，$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって，$\sin\theta=\dfrac{1}{2},\ \ \cos\theta=0$

ゆえに，$\theta=\dfrac{\pi}{6}+2n\pi,\ \ \dfrac{5}{6}\pi+2n\pi,\ \ \dfrac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ は整数）

3

(1)	$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$
(2)	$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{3},\ \ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,$ $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

3　(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ となる θ は，

$$\theta=\frac{\pi}{6},\quad \frac{5}{6}\pi$$

よって，不等式の解は，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

(2)　左辺を変形すると，$2\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\cos\theta<0$

これを整理して，$\cos\theta(2\sin\theta-\sqrt{3})<0$

よって，$\sin\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ \cos\theta<0$　または，$\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \ \cos\theta>0$

ゆえに，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{3},\ \ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi,\ \ \dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

高３　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1,1,1 （満点：9）

解答【2】

1

(1)	最大値	$\frac{1}{4}$
	最小値	$\frac{1}{64}$
(2)	最大値	1
	最小値	0

［解　説］

2

最大値	57	$x=-2$
最小値	-7	$x=0$

※最大値（最小値）と，そのときの x の値は完答

2 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと，$-2 \leqq x \leqq 0$ より，t の範囲は，$1 \leqq t \leqq 9$

与式を t の式で表して変形すると，

$$y=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x-6=t^2-2t-6=(t-1)^2-7$$

よって，$t=9$，つまり $\left(\frac{1}{3}\right)^x=9$ より $x=-2$ のとき最大値 57，

$t=1$，つまり $\left(\frac{1}{3}\right)^x=1$ より $x=0$ のとき最小値 -7

3

最大値	-3	$x=2$
最小値	-4	$x=8$

※最大値（最小値）と，そのときの x の値は完答

3 $\log_3(x+1)=t$ とおくと，$2 \leqq x < 26$ より，t の範囲は，$1 \leqq t < 3$
与式を t の式で表して変形すると，

$$y=\{\log_3(x+1)\}^2-4\log_3(x+1)=t^2-4t=(t-2)^2-4$$

よって，y は $t=1$ のとき最大値 -3，$t=2$ のとき最小値 -4 をとる。
$t=1$ のとき，　$\log_3(x+1)=1$ より $x=2$，
$t=2$ のとき，　$\log_3(x+1)=2$ より $x=8$
したがって，$x=2$ のとき最大値 -3，$x=8$ のとき最小値 -4

4

最大値	4	$x=9$

※最大値と，そのときの x の値は完答

4 真数条件より，$x>0$，$18-x>0$　よって，$0<x<18$
与式を変形すると，

$$y=\log_3(18-x)+\log_3 x=\log_3 x(18-x)=\log_3(-x^2+18x)$$

ここで，$t=-x^2+18x$ とすると，

$$t=-x^2+18x=-(x-9)^2+81$$

$0<x<18$ より $0<t \leqq 81$
$y=\log_3 t$ であるから，y は $t=81$ のとき最大値 4 をとる。
$t=81$ のとき，$-(x-9)^2+81=81$ より $x=9$
したがって，$x=9$ のとき最大値 4

高３　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1,1 （満点：8）

解答【3】

1

(1)	最大値　-2	$x=-1$
	最小値　-11	$x=2$
(2)	最大値　54	$x=-3$
	最小値　-54	$x=-6, 3$

※最大値（最小値）と，そのときの x の値は完答

2

(1)	最大値	$\dfrac{500}{27}a-b$
	最小値	$-b$
(2)	$a=\dfrac{1}{5}$，$b=4$	

［解　説］

1　(1)　$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると，$x=0$，1

よって，$-1\leqq x\leqq 2$ における増減表は下のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	-7	$\nearrow$	-6	$\searrow$	-11

したがって，$x=-1$ のとき最大値 -2，$x=2$ のとき最小値 -11 をとる。

(2)　$f'(x)=3x^2-27=3(x^2-9)=3(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると，$x=-3$，3

よって，$-6\leqq x\leqq 3$ における増減表は下のようになる。

x	-6	$\cdots$	-3	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-54	$\nearrow$	54	$\searrow$	-54

したがって，$x=-3$ のとき最大値 54，$x=-6$，3 のとき最小値 -54 をとる。

2　(1)　$f(x)=ax^3+5ax^2-b$ より，

$$f'(x)=3ax^2+10ax=ax(3x+10)$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=0$，$-\dfrac{10}{3}$

よって，$-5\leqq x\leqq 0$ における増減表は下のようになる。

x	-5	$\cdots$	$-\frac{10}{3}$	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

$$f(0)=-b$$
$$f(-5)=-125a+125a-b=-b$$

したがって，

$x=-\dfrac{10}{3}$ のとき，最大値 $f\left(-\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{500}{27}a-b$，

$x=-5$，0 のとき，最小値 $f(-5)=f(0)=-b$ をとる。

(2)　最大値が $-\dfrac{8}{27}$，最小値が -4 をとるので，

(1) より，$\dfrac{500}{27}a-b=-\dfrac{8}{27}$，$-b=-4$

これらを連立させ解くと，$a=\dfrac{1}{5}$，$b=4$

高３　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1,1 （満点：8）

解答【3】

3

$72\,\mathrm{cm}^3$

3　$10\,\mathrm{cm}$ の辺から $x\,\mathrm{cm}$ ずつ切り取るので，切り取る部分が存在する x の範囲は，$x>0$，$2x<10$ であるから，$0<x<5$

直方体の底面積は，$(10-2x)(8-x)\,\mathrm{cm}^2$

よって，直方体の容積を $y\,\mathrm{cm}^3$ とおくと，

$$y=x(10-2x)(8-x)=2x^3-26x^2+80x \quad \cdots ①$$

y を x で微分すると，

$$y'=6x^2-52x+80=2(3x-20)(x-2)$$

$y'=0$ とすると，$x=2,\ \dfrac{20}{3}$

よって，$0<x<5$ における増減表は右のようになる。

$x=2$ のとき y は最大値をとるので，①に $x=2$ を代入して，

$$y=2\cdot2^3-26\cdot2^2+80\cdot2=72$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	最大	↘	

高３　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1 （満点：7）

解答【4】

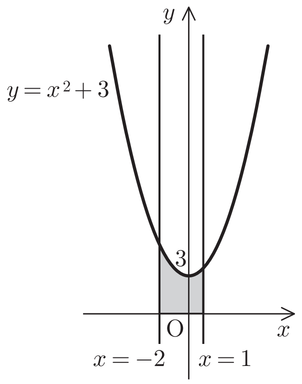
1

(1)	12
(2)	$\dfrac{64}{3}$
(3)	$\dfrac{152}{3}$

［解　説］

1 (1)　$x^2+3>0$ なので，つねに $y>0$

　よって，求める面積 S は右図の影の部分。



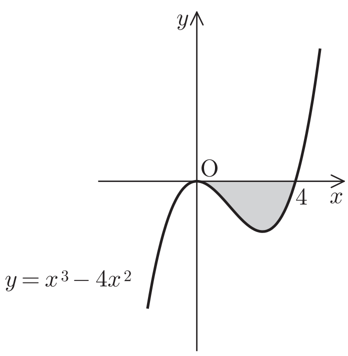
$$S=\int_{-2}^{1}\left(x^2+3\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{-2}^{1}$$
$$=12$$

(2)　放物線 $y=x^3-4x^2$ と x 軸との交点の x 座標は，

$x^2(x-4)=0$ より，$x=0$，4

　また，区間 $0\leqq x\leqq 4$ において，つねに $y\leqq 0$

　よって，求める面積 S は右図の影の部分。

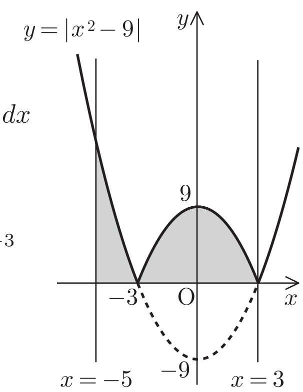


$$S=-\int_{0}^{4}\left(x^3-4x^2\right)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3\right]_{0}^{4}$$
$$=\frac{64}{3}$$

(3)　曲線と x 軸との共有点の x 座標は，$x=-3$，3

　区間 $-5\leqq x\leqq -3$ において $y=x^2-9$，区間 $-3\leqq x\leqq 3$ において $y=-x^2+9$ であるから，求める面積 S は右図の影の部分。

$$S=\int_{-5}^{3}|x^2-9|dx$$
$$=\int_{-5}^{-3}(x^2-9)dx+\int_{-3}^{3}(-x^2+9)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-9x\right]_{-5}^{-3}+\left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_{-3}^{3}$$
$$=\frac{152}{3}$$



高３　数学　チェックテスト2018冬期

配点：1,1,1,1,1,1,1 （満点：7）

解答【4】

2

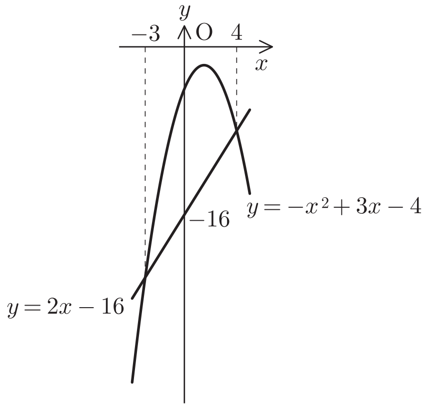
<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td colspan="2">解説の図を参照</td></tr>
<tr><td>面積</td><td>$\frac{343}{6}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td colspan="2">解説の図を参照</td></tr>
<tr><td>面積</td><td>32</td></tr>
</table>

2 (1)　放物線 $y=-x^2+3x-4$ と直線 $y=2x-16$ との交点の x 座標は,

$-x^2+3x-4=2x-16$ より,

$$(x+3)(x-4)=0$$

よって, $x=-3$, 4



また, 区間 $-3 \leqq x \leqq 4$ において,

$$2x-16 \leqq -x^2+3x-4$$

よって, 求める面積 S は,

$$S=\int_{-3}^{4}\left\{\left(-x^2+3x-4\right)-(2x-16)\right\}dx$$

$$=-\int_{-3}^{4}(x^2-x-12)dx$$

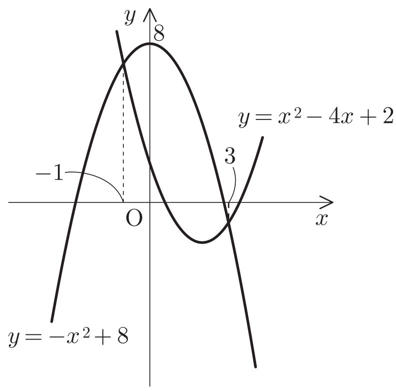
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x\right]_{-3}^{4}=\frac{343}{6}$$

(2)　放物線 $y=x^2-4x+2$ と, $y=-x^2+8$ との交点の x 座標は,

$x^2-4x+2=-x^2+8$ より,

$$(x+1)(x-3)=0$$

よって, $x=-1$, 3



また, 区間 $1 \leqq x \leqq 3$ において,

$$x^2-4x+2 \leqq -x^2+8$$

区間 $3 \leqq x \leqq 5$ において,

$$-x^2+8 \leqq x^2-4x+2$$

よって, 求める面積 S は,

$$S=\int_{1}^{3}\left\{\left(-x^2+8\right)-\left(x^2-4x+2\right)\right\}dx$$

$$+\int_{3}^{5}\left\{\left(x^2-4x+2\right)-\left(-x^2+8\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{1}^{3}(2x^2-4x-6)dx+\int_{3}^{5}(2x^2-4x-6)dx$$

$$=-\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{1}^{3}+\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{3}^{5}$$

$$=32$$

配点：1,1,1,1,1,1,1 （満点：7）

解答【5】

〔考え方〕

(1)　$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO}$ と変形する。また，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\right)$ と変形する。

(2)　$\overrightarrow{CM}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$ と表せる。$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{CM}$ が直交するのは，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CM}=0$ となるときである。

ア	3
イウ	-1
エ	2
オ	$\sqrt{7}$
カキ	$\sqrt{14}$
ク	3
ケコサ	$\dfrac{6}{11}$

〔解　説〕

(1)　$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}=\left|\overrightarrow{CO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\cos\angle OCA=2\cdot3\cdot\cos60°=3$

$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos\angle OCB=2\cdot3\cdot\cos60°=3$

$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\cdot\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}\right)=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}-\left|\overrightarrow{CO}\right|^2=3-2^2=-1$

$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}\cdot\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO}\right)=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}-\left|\overrightarrow{CO}\right|^2=3-2^2=-1$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}\right)=\left|\overrightarrow{CO}\right|^2+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

ここで，$\angle AOB=90°$ より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

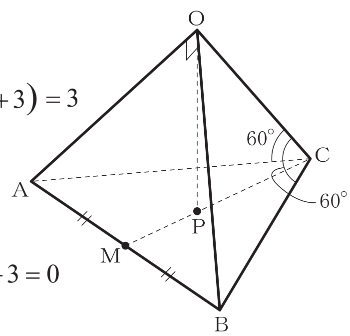
よって，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2^2+(-1)+(-1)+0=2$

また，$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}\right|^2=\left|\overrightarrow{CA}\right|^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}+\left|\overrightarrow{CO}\right|^2=3^2-2\cdot3+2^2=7$

$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO}\right|^2=\left|\overrightarrow{CB}\right|^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CO}+\left|\overrightarrow{CO}\right|^2=3^2-2\cdot3+2^2=7$　　$\therefore\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{7}$

$\angle AOB=90°$ より，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}=\sqrt{14}$

(2)　$\overrightarrow{CM}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}$ より，



$\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CO}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{2}(3+3)=3$

$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{CM}$ が直交するのは，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CM}=0$ のときである。

ここで，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CO}=t\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CO}$ より，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CM}=\left(t\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CO}\right)\cdot\overrightarrow{CM}=t\left|\overrightarrow{CM}\right|^2-\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}=t\left|\overrightarrow{CM}\right|^2-3=0$

ここで $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|$ より，$\angle CMB=90°$ であるから，

$\left|\overrightarrow{CM}\right|^2=\left|\overrightarrow{CA}\right|^2-\left(\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)^2=3^2-\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=\dfrac{11}{2}$

$\therefore t\cdot\dfrac{11}{2}-3=0$　　$\therefore t=\dfrac{6}{11}$　　これは$0<t<1$を満たす。